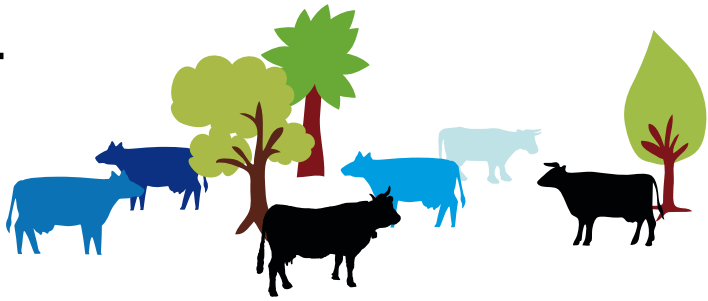
Sinds 2008 is er ook een juniorvariant van de Wiskunde Olympiade. Voor deze wedstrijd worden 200 scholieren uit de tweede en derde klas uitgenodigd die het jaar ervoor uitzonderlijk goed gepresteerd hebben bij de W4Kangoeroewedstrijd. Deze scholieren krijgen zestien vragen voorgeschoteld. Pittige vragen, waar wiskundig over nagedacht moet worden, maar waar toch enkel voorkennis van de basisschool voor nodig is. We bekijken nu een paar opgaven van vorig jaar waarbij geteld moet worden.

■ door Peter Ypma

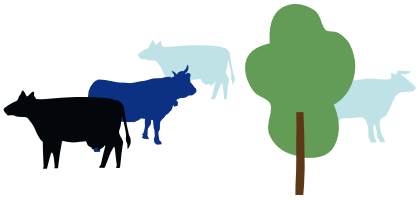
TELLEN, EEN KUNST APART



Tijdens een wandeling kwam ik afgelopen week een opa met twee kleinzonen tegen. Ze waren aan het tellen hoeveel koeien er in een weide stonden. Dat was niet zo makkelijk: de koeien liepen door elkaar en als hindernis had de boer ook nog een paar bomen geplant. Een van de jongens kwam echter op het idee om een foto te maken: 'Dan lopen ze niet meer door elkaar.' Met behulp van de foto kwamen ze erachter dat er 26 koeien waren. Daarop kwam de boer nog een praatje maken. Die zei: 'Ik tel ze ook regelmatig, maar dan in de stal. Daar staan ze op een rijtje. Dat telt wel zo makkelijk.'

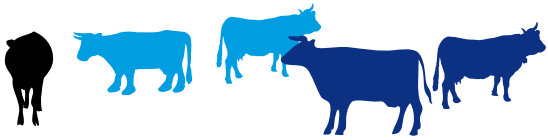
De jongens vonden de strategie van de boer maar valsspelen. Deze strategie passen wiskundigen echter ook vaak toe wanneer ze iets lastigs proberen te tellen. Ze proberen hetgene wat ze moeten tellen zó te manipuleren dat het makkelijk telt. Laten we eens bekijken hoe dat in zijn werk gaat bij de volgende opgave, afkomstig uit de Junior Wiskunde Olympiade van vorig jaar.

Opgave 4 (JWO 2013, deel 2)
Hoeveel getallen tussen 1 en 1000 zijn niet deelbaar door 2, wel deelbaar door 3, niet deelbaar door 5 en wel deelbaar door 7?



Het lastige is dat we met veel verschillende eigenschappen rekening moeten houden. Zo voldoet het getal 9 (een van de 1000 getallen waar de opgave over gaat) wel aan de eerste drie eisen – 9 is niet deelbaar door 2, wel deelbaar door 3 en niet deelbaar door 5 – maar moeten we het toch niet meetellen, omdat 9 niet deelbaar is door 7 en dus niet aan de vierde eis voldoet.

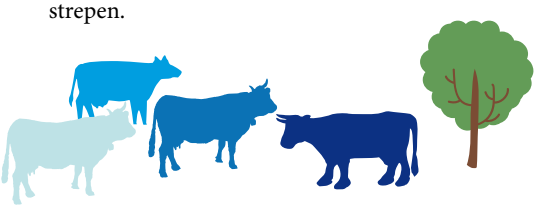
MINDER KANDIDATEN We zitten dus opgescheept met veel kandidaten (de getallen 1 tot en met 1000) en veel eisen. Het is daarom logisch om



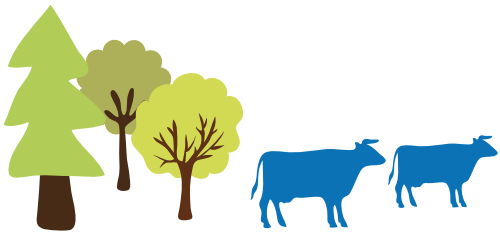
op zoek te gaan naar een manier om het aantal kandidaten en eisen te verkleinen. Dit is mogelijk door twee stukjes kennis te combineren. We weten namelijk dat de getallen veelvouden van 3 én 7 moeten zijn. Dan moet het ook een veelvoud van 21 zijn. Onder de getallen tussen 1 en 1000 houden we dan nog maar 47 kandidaten over: $1 \cdot 21$, $2 \cdot 21$, $3 \cdot 21$, ..., $47 \cdot 21$.

We hoeven deze 47 getallen nog maar op twee eigenschappen te checken. Alleen de getallen die zowel niet deelbaar door 2 als niet deelbaar door 5 zijn, moeten we meetellen. We beginnen met te kijken welke niet deelbaar zijn door 2. Hiervoor merken we op dat een oneven getal keer een oneven

getal weer een oneven getal als uitkomst geeft. Dus kandidaten van de vorm '*oneven* · 21' voldoen aan de eis dat ze niet deelbaar zijn door 2. De andere kandidaten (dus van de vorm '*even* · 21') voldoen juist niet aan deze eis, want een even getal keer 21 geeft juist een even uitkomst. Eenzelfde soort principe werkt voor het getal 5. Het product van twee getallen is alleen deelbaar door 5 als een van de getallen zelf deelbaar is door 5. Aangezien 21 zelf niet deelbaar is door 5, moeten we alleen de getallen van de vorm '*vijfvoud* · 21' van onze lijst wegstrepen.

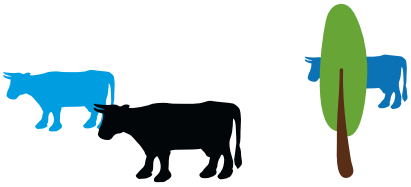


We weten nu dus dat het gaat om de getallen van de vorm '*oneven maar geen vijfvoud* · 21', dus dat we alleen maar hoeven te bedenken hoeveel getallen er kleiner dan 48 zijn die oneven en geen vijfvoud zijn. We kunnen deze getallen direct tellen of nog een keer gaan ordenen. Het ordenen kan bijvoorbeeld door in te zien dat de oneven getallen die geen vijfvoud zijn, precies die getallen zijn die



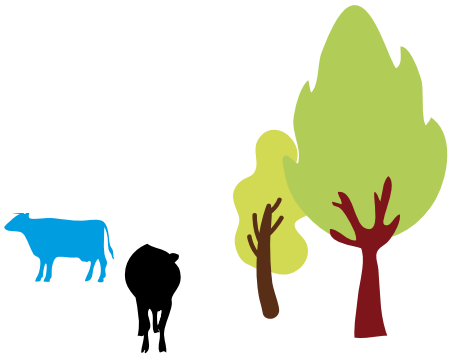
op een 1, 3, 7 of 9 eindigen. Daarvan zijn er vier bij de eerste tien getallen, vier bij de getallen 11 tot en met 20, vier bij de getallen 21 tot en met 30, vier bij de getallen 31 tot en met 40 en ten slotte drie bij 41 tot en met 47. We hebben in totaal dus $4 \cdot 4 + 3 = 19$ getallen die aan onze eigenschap voldoen.

MEER PROBLEMEN Telproblemen zoals deze opgave kom je veel tegen bij de Wiskunde Olympiade. Op de Junior Wiskunde Olympiade waren het er vorig jaar maar liefst vier. Twee daarvan staan hieronder. Bij deze problemen is de moeilijkheid niet om uit een berg mogelijkheden de juiste te selecteren, maar om de mogelijke opties op te sporen en deze niet dubbel te tellen. Veel puzzelplezier! ■



Opgave 7 (JWO 2013, deel 1)
We willen de getallen 1 tot en met 9 in een groep van vier en een groep van vijf getallen verdelen. In elk van die groepen vermenigvuldigen we de getallen. We delen de grootste van de twee uitkomsten door de kleinste. De uitkomst van die deling moet een geheel getal zijn. Hoeveel opsplitsingen in een groep van vier en een groep van vijf getallen zijn er mogelijk?

Opgave 8 (JWO 2013, deel 1)
Jan heeft zes even grote vierkanten: twee rode, twee grijze en twee blauwe. Door die aan elkaar te plakken maakt hij een kubus. Hoeveel verschillende kubussen kan Jan maken? Twee kubussen zijn verschillend als ze niet door draaien in de ruimte in elkaar kunnen worden overgevoerd.



Antwoorden: opgave 7: vier, opgave 8: zes.